EXERCICE N°1 :	15'	3 points	

Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant la réponse.

1°) Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ alors $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a,b]$.

2°) Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$ alors f et g sont égales sur $[a,b]$.

3°) Pour tout x et t on a : $\int_0^1 t\,x^2dt=\int_0^1 t\,x^2dx$.

4°) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$.

5°) $\int_{-1}^{1}\frac{x^4\sin x}{\sqrt{1+x^2}}dt=0$.

6°) Si f est une fonction continue sur IR et périodique de période T alors $\int_0^{2T} f(t)dt=2\int_0^{T} f(t)dt$.

EXERCICE N°2 :	30'	6 points	

Soit f la fonction définie sur IR par : $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4 cm).

1°) Etudier les variations de f et tracer C_f.

2°) En utilisant la méthode des rectangles et en subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en quatre intervalles de même amplitude, donner un encadrement de $I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$.

3°) Soit G la fonction définie par $G(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$.

Montrer que G est dérivable sur IR et calculer $G'(x)$.

4°) Soit H la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x)=G(\tan x)$.

a) Montrer que $H'(x)=1$, en déduire $H(x)$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer alors que $I=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}$ puis calculer $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}dt$.

EXERCICE N°3 : | 25' | 5 points

1°) Soit g la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ par : $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2}$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$.

b) En déduire la primitive F_0 de g sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et qui s'annule en 1.

2°) a) À l'aide d'une intégration par parties calculer la valeur moyenne $\overline{f}$ de $f : x\mapsto x\cos 2x$ sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

b) Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1cm)

Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $f(x)\geq 0$ puis calculer l'aire de la région limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $y=0$, $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE N°4 : | 35' | 6 points

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan^2 x$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2°) Soit (D) le domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites : $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$.

a) Montrer que l'aire (en unité d'aire) du domaine (D) est : $1-\dfrac{\pi}{4}$.

b) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx=\dfrac{1}{3}$.

c) En déduire le volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine (D) autour de l'axe des abscisses.

3°) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}(x)dx$.

a) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $U_n\geq 0$.

b) Montrer que (U_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $U_{n+1}+U_n=\dfrac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.